2 運動の法則

2.1 ニュートンの第 1 法則 (慣性の法則)　The law of inertia

ニュートンの第 1 法則 (慣性の法則)

物体に力が作用していなければ，その物体の速度は変化しない．

何もしなければそのまま運動を続ける性質：慣性

第 1 法則が成り立つ座標系を**慣性系** (inertial frame)

例えば、地球は自転しているため、厳密に言うと慣性系ではない。

例題：地球が厳密な意味では、慣性系でないことを示すにはどのような実験をすればいいか。

これからは、特に断らない限り、系の基準座標系は慣性系である。

2.2 ニュートンの第 2 法則 (運動の法則)

the law of motion

ニュートンの第 2 法則 (運動の法則)

物体の加速度 $\vec{a}$ は，その物体に働く力を $\vec{F}$，その質量を m とすると

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{2.1}$$

の関係がある．

この法則は，まず力がベクトル量であることを意味している．よって，いくつかの力が働くときは，その**合力**をベクトルの和として求め，右辺に現れる $\vec{F}$ はこの合力で置き換えることになる．

力と加速度が比例することを明確に述べている．

質量 (mass) を力と加速度の比例係数として定義している

問：重力の無い状態で、質量 500 g の物体と 5 kg の物体が浮いている。
どちらの物体の方が動きやすいか？

このように，運動の法則からは質量の相対的な比のみが決まる．そこで，質量の基準を統一する必要があり，現在は**キログラム原器**とよばれるパリ郊外の国際度量衡局にあるプラチナ-イリジウム合金でできた物の質量を 1 kg (キログラム) と定めている[1)]．

慣性系の実験で、質量が 1 kg と定義された標準物体に力を加える。この標準物体の加速度が 1 m/s^2 であれば、この時標準物体に働いた力は 1 N である。

2.3　単位について

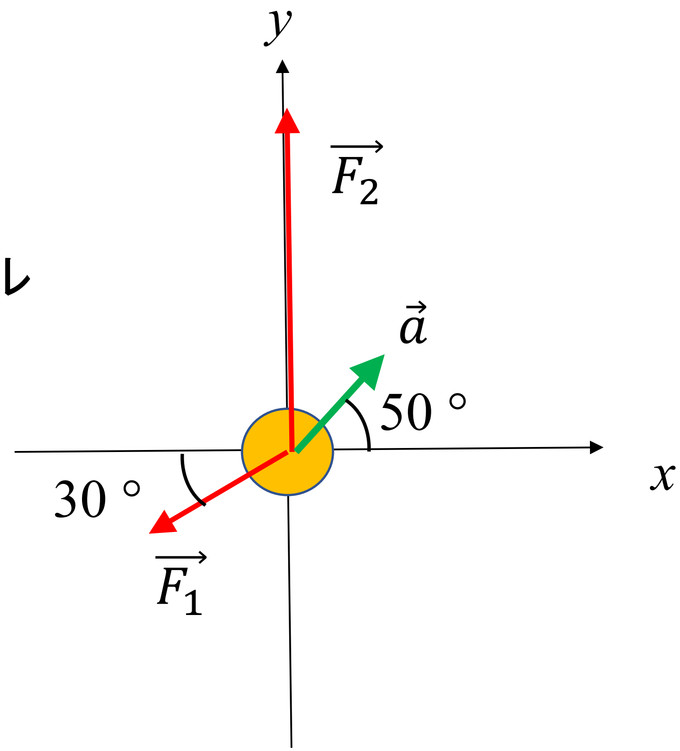
時間の単位

セシウム 133 が放出する特定の光が，9192631770 回振動するのにかかる時間を 1 s (秒) と定義する．

長さの単位

光が 1/299792458 秒間に伝わる距離を 1 m (メートル) と定義する．

質量 2 kg のパックが摩擦の無い水平面上に
あり、$\vec{a}$ で示す向きに3.0 m/s^2 の加速度を持っている。
加速度は3つの水平方向の力によるものであり
そのうち2つ、大きさ 10 N の $\overrightarrow{F_1}$ と大きさ 20 N の $\overrightarrow{F_2}$
がわかっている。第3の力を x 方向と y 方向の単位ベクトル
を用いて表せ。



$\cos 50° = 0.643$　$\cos(-150°) = -0.866$
$\sin 50° = 0.766$　$\sin(-150°) = -0.5$

2.4 ニュートンの第 3 法則 (作用・反作用の法則)

the law of action and reaction

ニュートンの第 3 法則 (作用・反作用の法則)

2 つの物体が相互作用するとき，それぞれの物体に働く力の大きさは等しく，力の向きは反対である．

2 つの物体 A, B があり，何らかの形で A から B に $\vec{F}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$ の力が作用しているとすると，B からは A に力 $\vec{F}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}$ の力が反作用として働く．

$$\vec{F}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = -\vec{F}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}} \tag{2.4}$$

例題：物体 A が物体 B に及ぼす力を $\vec{F}_{A\to B}$ 、物体 B が物体 A に及ぼす力を $\vec{F}_{B\to A}$ とする。
他からの外力がなければ、物体 A と物体 B の運動方程式は

$$m_A \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{F}_{B\to A} \qquad m_B \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \vec{F}_{A\to B}$$

と書ける。ただし、物体 A の質量を m_A, 速度を v_A 、物体 B の質量を m_B, 速度を v_B とした。作用反作用の法則から、運動量保存則を導け

$$m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = \mathrm{const.}$$

摩擦のない氷の上でパックを滑らせる。もし南北に非常に長い氷の上でパックを滑らせると地上にいる人はパックが南に進むに従って、西向きにほんの少し加速されているように見える。これは地球が東向きに自転していることに起因している。

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_3 = m\vec{a} - \vec{F}_1 - \vec{F}_2$$

$$\begin{aligned} F_{3,x} &= ma_x - F_{1,x} - F_{2,x} \\ &= m(a\cos 50°) - F_1\cos(-150°) - F_2\cos(90°) \\ &= 2.0(3.0\cos 50°) - 10_1\cos(-150°) - 20\cos(90°) \\ &= 12.5\mathrm{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{3,y} &= ma_y - F_{1,y} - F_{2,y} \\ &= m(a\sin 50°) - F_1\sin(-150°) - F_2\sin(90°) \\ &= 2.0(3.0\sin 50°) - 10\sin(-150°) - 20\sin(90°) \\ &= -10.4\mathrm{N} \end{aligned}$$

$$\vec{F}_3 = (12.5\ \mathrm{N})\vec{e}_x + (-10.4\mathrm{N})\vec{e}_y$$

作用・反作用の法則より

$$\vec{F}_{B\to A}+\vec{F}_{A\to B}=0$$

$$m_{\mathrm{A}}\frac{d\vec{v}_{\mathrm{A}}}{dt}+m_{\mathrm{B}}\frac{d\vec{v}_{\mathrm{B}}}{dt}=0$$

質量 m は時間に依存しないので

$$m_{\mathrm{A}}\frac{d\vec{v}_{\mathrm{A}}}{dt}=\frac{d}{dt}(m_{\mathrm{A}}\vec{v}_{\mathrm{A}}),\qquad m_{\mathrm{B}}\frac{d\vec{v}_{\mathrm{B}}}{dt}=\frac{d}{dt}(m_{\mathrm{B}}\vec{v}_{\mathrm{B}})$$

$$\frac{d}{dt}(m_{\mathrm{A}}\vec{v}_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}\vec{v}_{\mathrm{B}})=0$$

$$m_A\vec{v}_A+m_B\vec{v}_B=\mathrm{const.}$$

3 力と運動

3.1 自由粒子の運動

自由粒子(free particle) 力が働いていない粒子

3.1.1 直線上の自由粒子

【直線上の粒子】 x 軸上だけを動ける自由粒子

運動方程式の x 方向は

$$m\ddot{x} = F_x \tag{3.1}$$

F_x 力のベクトルの x 成分である.

1 次元自由粒子の問題

時刻 $t=0$ に x_0 にあり，速度が v_0 の粒子の時刻 t における座標 $x(t)$ を求めよ.

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\dot{x}}{dt} = 0 \tag{3.2}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \tag{3.3}$$

$x(t)$ に関する微分方程式 differential equation を解けばよい．

式 (3.3) の両辺を時間について積分

$$\int \frac{dx}{dt}\,dt = \int v_0\,dt \tag{3.4}$$

左辺は微分の積分なので被積分関数に戻る．一方，右辺は定数 v_0 の不定積分

$$x(t) = v_0\,t + C \tag{3.5}$$

C は不定積分に伴う積分定数である．$t=0$ における条件から積分定数 C は

$$x(0) = C = x_0 \tag{3.6}$$

運動の初期値を決める条件を**初期条件** (initial condition)

$$x(t) = v_0\,t + x_0 \tag{3.7}$$

3.1.2 空間中の自由粒子

空間中の自由粒子の運動

時刻 $t=0$ に $\vec{r}_0$ にあり，速度が $\vec{v}_0$ の粒子の時刻 t における座標 $\vec{r}(t)$ を求めよ．

ベクトルの微分は各成分の微分

【運動方程式】

$$m\vec{a} = \vec{0} \tag{3.8}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z = \vec{0} \tag{3.9}$$

基底ベクトルはそれぞれ独立なので，式 (3.9) は座標のそれぞれの成分 x, y, z の 2 階微分が 0 という微分方程式を与える． それぞれの成分の初期値

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

各成分の解

$$x = v_{0x}t + x_0, \qquad y = v_{0y}t + y_0, \qquad z = v_{0z}t + z_0 \tag{3.11}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \tag{3.12}$$

【ベクトルの積分】

$$
\begin{aligned}
\int \frac{d\vec{r}}{dt}\,dt &= \int \vec{v}_0\,dt \\
&= \left(\int v_{0x}\,dt\right)\vec{e}_x + \left(\int v_{0y}\,dt\right)\vec{e}_y + \left(\int v_{0z}\,dt\right)\vec{e}_z \\
&= \vec{v}_0 t + \vec{C} \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

ベクトルの積分

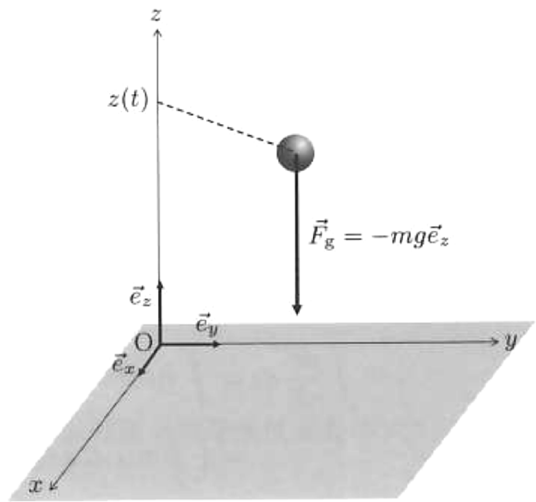
ベクトルの積分は，それぞれの成分の積分と考えてよい．

3.2　重力と自由落下

【重力】　重力 (gravitational force) $\vec{F}_{\mathrm{g}}$

質量 m の粒子にかかる力

$$\vec{F}_{\mathrm{g}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = -mg\vec{e}_z \qquad (3.14)$$



g は重力加速度 (gravitational acceleration)

10 mm/s^2	1 ガル～震度1
0.6 m/s^2	冥王星の重力加速度
0.722 m/s^2	新幹線の加速度
1.622 m/s^2	月の重力加速度
8.18 m/s^2	阪神淡路大震災
9.80665 m/s^2	地球の重力加速度
23.12 m/s^2	木星の重力加速度
40.22 m/s^2	地震で観測された世界最大加速度　2008年 岩手・宮城内陸地震

自由落下

地上で質量 m の粒子を高さ h の位置からそっと手を離したとき，その後の運動を運動方程式

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\mathrm{g}} \tag{3.15}$$

から求めよ．

【鉛直方向の運動】 z 方向だけに注目すると運動方程式は

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g \tag{3.16}$$

【運動方程式の解】 この微分方程式を $\dot{z} = v_z$ と書いて 1 回積分すると

$$\int \frac{dv_z}{dt}\, dt = -g \int dt \tag{3.17}$$

$$\dot{z} = v_z = -gt + C_1 \tag{3.18}$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2 \tag{3.19}$$

:初期値 $\dot{z}(0) = 0,\ z(0) = h$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \tag{3.20}$$

x, y 方向は，加速度が 0 で，初速度も 0 なので，

$$x(t) = x_0, \qquad y(t) = y_0 \tag{3.21}$$

例題：地上 490 (m) の位置から質量 m (kg) の物体を、初速度 0 (m/s) で自由落下させた時、地面に到達するまでの時間と、地面に衝突する直前の速度 (m/s) を微分方程式を解いて求めよ。

$$\begin{cases} x_0 = 490 \text{ (m)} \\ \upsilon_0 = 0 \text{ (m/s)} \end{cases}$$

$$m\frac{dx^2}{dt^2} = -mg$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} = -g$$

$$\dot{x} = \int(-g)\,dt = -gt + \upsilon_0 = -gt$$

$$x = \int(-gt)\,dt = -\frac{1}{2}gt^2 + x_0$$

$$x = -4.9t^2 + 490$$

$$x = 0$$

$$t = 10 \text{ (s)}$$

$$\upsilon = -gt = -98 \text{ (m/s)}$$

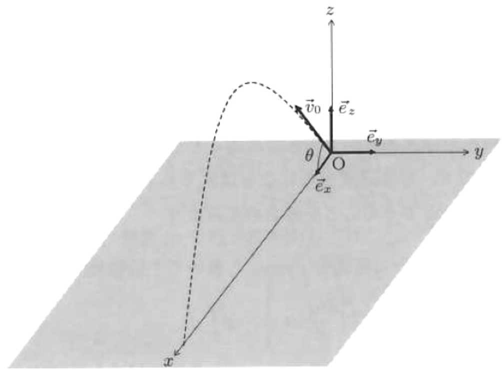
3.2.1 放物運動

斜方投射の問題

図 3.2 のように，ボールを速さ V で，仰角が θ の方向に投げたとき，最も遠くまで飛ぶ角度を求めよ．

投げた方向を x 軸方向とすると，初速度は問題より

$$\vec{v}_0 = V \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$



x, y 方向への等速度運動と z 軸方向の等加速度運動なので，$\vec{r}\,(0) = \vec{0}$ を考慮すると

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \left(-\frac{1}{2}gt^2 + (V\sin\theta)\,t \right) \vec{e}_z + (V\cos\theta)\,t\vec{e}_x \\ &= \begin{pmatrix} (V\cos\theta)\,t \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + (V\sin\theta)\,t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ボールが再び地上にぶつかる時刻 T は，高さ 0，すなわち $z(T)=0$ を満たす

$$-\frac{1}{2}gT^2+VT\sin\theta=0$$

この 2 次方程式の解のうち $T=0$ は打ち上げの瞬間を表し，$T=\dfrac{2V\sin\theta}{g}$ が着地の時刻を表す．着地時，ボールの飛距離は

$$\begin{aligned} x(T) &= VT\cos\theta \\ &= \frac{2V^2\sin\theta\cos\theta}{g}=\frac{V^2\sin 2\theta}{g} \end{aligned}$$

$x(T)$ は $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{V^2}{g}$ をとる

運動方程式がもう少し複雑な形になった場合を考える。

3.3 摩擦力

3.3.1 速度に比例する摩擦

まず最初に摩擦だけを受けて運動する場合: 運動は x 軸方向に起こるとする

摩擦のある1次元運動

速度に比例する摩擦力

$$F_x = -\mu\dot{x} \tag{3.22}$$

が働くとき，初速度 v_0 で原点から放たれた粒子の運動を求めよ．ここで，μ は摩擦の強さを示す定数である．

運動方程式は

$$m\ddot{x} = -\mu\dot{x} \tag{3.23}$$

これは，$v = \dot{x}$ に関する1階微分方程式

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{m}v \tag{3.24}$$

この微分方程式は，単に両辺を積分するだけで解くことはできない．
未知関数が両辺に現れる場合，未知関数を左辺に集めると解くことができる．
v で両辺を割ると

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{m} \tag{3.25}$$

このような形になれば，両辺を積分することができる．左辺を積分

$$\frac{d}{dt}\log v = \frac{1}{v}\frac{dv}{dt}$$ なので

$$\int \frac{1}{v}\frac{dv}{dt}\,dt = \int \frac{d}{dt}(\log v)\,dt = \log v + c \tag{3.26}$$

右辺を積分

$$\int \left(-\frac{\mu}{m}\right) dt = -\frac{\mu}{m}t + c' \tag{3.27}$$

それぞれの不定積分において積分定数を c, c' とする．

積分定数を $C = c' - c$ と集めて整理

$$\log v = -\frac{\mu}{m}t + C \tag{3.28}$$

時刻 t における速度

$$v(t) = e^{-\frac{\mu}{m}t+C} = Ae^{-\frac{\mu}{m}t} \tag{3.29}$$

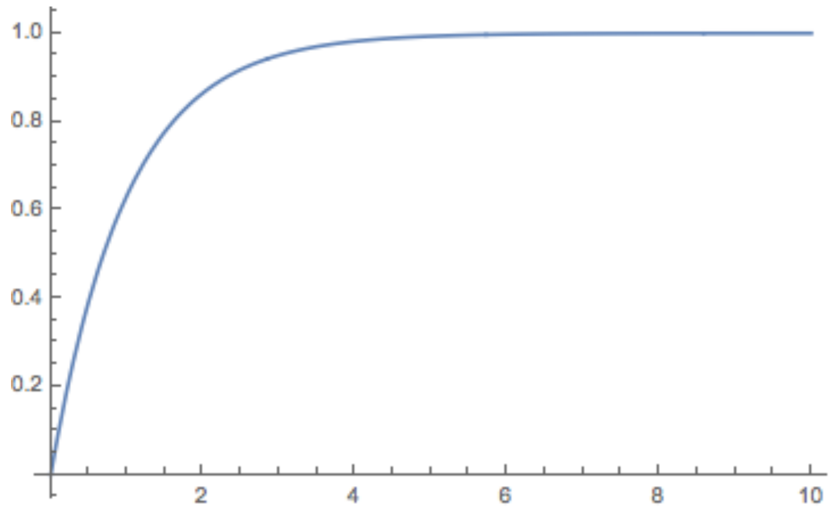
$A = e^C$ は初期値から決まる定数で 初速度が v_0

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\mu}{m}t} \tag{3.30}$$

初速度が v_0 で放たれた物体は空気抵抗によって指数関数的に遅くなる
積分すれば物体の位置 x が求まる

問題： 初期条件 $x(0) = 0$ のもとで、$x(t)$ を求め、グラフをかけ。

$$x(t) = \frac{v_0 m}{\mu}(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t})$$

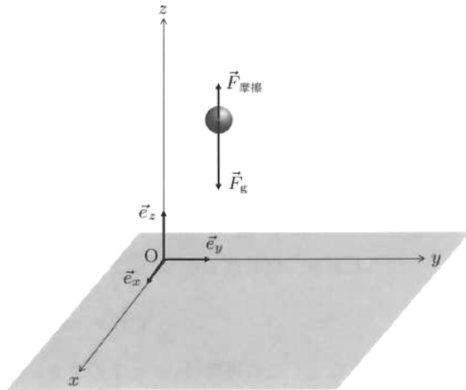


3.3.2　雨滴の運動と終端速度

雨は垂直に落下しているとして，z 方向の運動のみを考える

空気による摩擦力は前節と同様に，速度に比例するとして $\vec{F}_{摩擦} = -\mu\dot{z}\vec{e}_z$ とする.

$$F_z = -m\lambda\dot{z} - mg \tag{3.31}$$



運動方程式を簡単にするために $\mu = m\lambda$ とおいた.

運動方程式

$$m\ddot{z} = F_z$$

$$\ddot{z} + \lambda\dot{z} + g = 0 \tag{3.32}$$

落下していく雨滴は時間がたつと摩擦と重力がつり合って一定の速度になる

その速度を v_∞ と書き，**終端速度** (terminal velocity) とよぶ.

等速度運動のとき座標の 2 階微分は $\ddot{z} = \dot{v}_\infty = 0$ になる

$$v_\infty = -\frac{g}{\lambda} \tag{3.33}$$

終端速度に達するまでの運動を $z(t) = \tilde{z}(t) + v_\infty t$ で表す　　$\dot{z} = \dot{\tilde{z}} + v_\infty$

新しい関数 $\tilde{z}$ 運動方程式に代入する

$$\ddot{\tilde{z}} = -\lambda \dot{\tilde{z}} \tag{3.34}$$

これは，重力のないときの方程式と同じである.

$$\dot{\tilde{z}} = \tilde{v} \qquad \frac{d\tilde{v}}{dt} = -\lambda \tilde{v}$$

$$\tilde{v}(t) = Ae^{-\lambda t}$$

$$v = \frac{dz}{dt} = \tilde{v} + v_\infty$$

$t = 0$ で初速度が 0

$$0 = A + v_\infty \qquad A = -v_\infty$$

$$\dot{z}(t) = v_\infty (1 - e^{-\lambda t}) \tag{3.35}$$

$$\ddot{z} + \lambda \dot{z} + g = 0 \tag{3.32}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\lambda v - g$$

$$\frac{dv}{\lambda v + g} = -dt$$

$\int \frac{f'}{f} dx = log\lfloor f \rfloor$　という公式があるので

$$\int \frac{\lambda}{\lambda v + g} dv = -\int \lambda \, dt$$

$$log\lfloor \lambda v + g \rfloor = -\lambda t + C$$

$$|\lambda v + g| = e^{-\lambda t + C}$$

$$\lambda v + g = \pm e^{C} e^{-\lambda t} = C' e^{-\lambda t}$$

$$v = \frac{C'}{\lambda} e^{-\lambda t} - \frac{g}{\lambda}$$

$t = 0$ で初速度が 0

$$C' = g$$

$$v = \frac{g}{\lambda} e^{-\lambda t} - \frac{g}{\lambda} = -\frac{g}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) = v_{\infty}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$$

$t=0$ で，雨滴は高さが H の雲から落下し始めたとして $z(t)$ を求めよ．

$$\int \frac{dz}{dt}\,dt = z(t) = \int dt\; v_\infty (1-e^{-\lambda t}) = v_\infty \left(t + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right) + C$$

初期値 $z(0)=H$

$$C = H - \frac{v_\infty}{\lambda} \qquad z(t) = v_\infty \left(t - \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda} \right) + H$$

$\lambda t \ll 1$ のときに指数関数を展開する

$$e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + \frac{1}{2}(\lambda t)^2 \cdots$$

$$z(t) \simeq v_\infty \left(t - \frac{1-\left(1-\lambda t + \frac{1}{2}(\lambda t)^2\right)}{\lambda} \right) + H = -\frac{1}{2} v_\infty \lambda t^2 + H$$

$\lambda t \gg 1$

指数関数 $\dfrac{e^{-\lambda t}}{\lambda}$ はほとんど 0 と思えるので

$$z(t) \simeq v_\infty t - \frac{v_\infty}{\lambda} + H \tag{3.37}$$

3.3.3 変数分離形の微分方程式

1 階微分方程式が 2 個の関数 f, g を用いて

$$\frac{dv}{dt} = f(v)g(t) \tag{3.38}$$

未知関数 v の微分が v のみの関数 $f(v)$ と変数 t のみの関数 $g(t)$ の積に分解

微分方程式を**変数分離形** (separation of variables)

両辺を $f(v)$ で割って両辺を t で積分すると

$$\int \frac{1}{f(v)} \frac{dv}{dt}\, dt = \int g(t)\, dt \tag{3.39}$$

$$\int \frac{dv}{f(v)} = \int g(t)\, dt \tag{3.40}$$

それぞれを独立に積分することで未知関数を求めることができる.

問題：微分方程式　$\dfrac{dy}{dx} = -\omega^2 \dfrac{x}{y}$　を解け。

$$\frac{dy}{dx} = -\omega^2 \frac{x}{y}$$

$$ydy = -\omega^2 xdx$$

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = C$$

$$y^2 + \omega^2 x^2 = C'$$

3.4 微分と級数展開

微分方程式の解が複雑な関数になっているとき、その性質を調べるため
多項式で近似することか有用

3.4.1 テイラー展開

ある関数 $f(t)$ が与えられたときに，その関数を原点 $t=0$ のまわりで級数による近似

$$f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_n t^n + \cdots \tag{3.48}$$

係数 $c_0, c_1, c_2, \ldots$の決定法

$t=0$ の値から

$$c_0 = f(0) \tag{3.49}$$

c_1 を求めるには，両辺を微分すると

$$\frac{df}{dt} = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \cdots + n c_n t^{n-1} + \cdots \tag{3.50}$$

$t=0$ を代入すると $c_1 = \left.\dfrac{df}{dt}\right|_{t=0}$

微分を n 回繰り返すと

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = n!\, c_n + \cdots + \frac{(n+k)!}{k!} c_{n+k} t^k + \cdots \tag{3.51}$$

したがって、

$$c_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n f(t)}{dt^n}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0) \tag{3.52}$$

展開式 (3.48) に代入すると

$$f(t) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)t + \frac{1}{2!}f''(0)t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)t^n + \cdots \tag{3.53}$$

これを関数 $f(t)$ の $t=0$ におけるテイラー展開 (Taylor expansion)

特に，原点での展開をマクローリン展開 (Maclaurin expansion)

問題：次の関数の x=0 付近でのテイラー展開を求めよ。

1) $(1+x)^k$

2) e^x

3) $\sin x$

4) $\cos x$

5) $\log(1+x)$

1) $(1+x)^k = 1 + kx + \frac{1}{2}k(k-1)x^2 + \cdots$

2) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots$

3) $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$

4) $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots$

5) $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots$

3.4.2 テイラー展開と微分方程式

テイラー展開を用いて，次の微分方程式を解いてみよう．

$$\frac{df}{dt} = f \tag{3.54}$$

ただし，$f(0) = 1$ とする．

$$f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_n t^n + \cdots \tag{3.48}$$

$$\frac{df}{dt} = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \cdots + nc_n t^{n-1} + \cdots \tag{3.55}$$

微分方程式 (3.54) は式 (3.55) ともとの関数 f が等しいことを意味する．

式 (3.55) と式 (3.48) の t^k の係数がそれぞれ等しい．

$$c_0 = c_1, \quad c_1 = 2c_2, \quad \cdots, \quad c_{n-1} = nc_n \tag{3.56}$$

この漸化式の解は

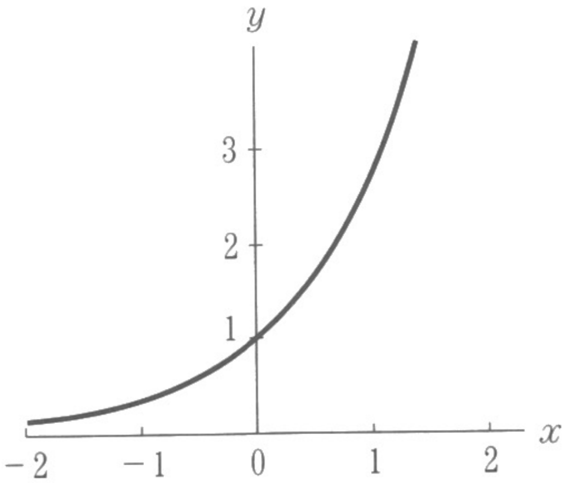
$$c_n = \frac{1}{n!} c_0 \tag{3.57}$$

$f(0) = c_0 = 1$ なので

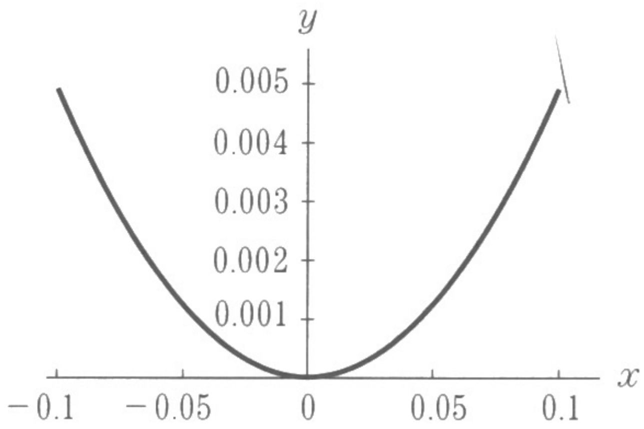
$$f(t) = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots \tag{3.58}$$

$$f(t) = e^t \tag{3.59}$$

テイラー展開の幾何学的意味



4 - 6 図　$y = e^x$ のグラフ



4 - 7 図　$y = e^x - 1 - x$ のグラフ

3.4.3　三角関数のテイラー展開とオイラーの公式

正弦関数のテイラー展開は

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\theta^{2n+1} + \cdots \tag{3.62}$$

1 回微分すると $(\sin\theta)' = \cos\theta$ なので，余弦関数 $\cos\theta$ のテイラー展開

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}\theta^{2n} + \cdots \tag{3.63}$$

指数関数のテイラー展開は

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots \tag{3.60}$$

:指数関数の展開の変数に $t = i\theta$ を代入

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(i\theta)^n + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \cdots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned} \tag{3.64}$$

オイラーの公式 (Euler's formula)　　　$e^{i\pi} = -1$

オイラーの公式の応用

$$e^{2i\theta} = (e^{i\theta})^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \tag{3.65}$$

一方

$$e^{2i\theta} = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta \tag{3.66}$$

実部と虚部をそれぞれ比較することにより

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta, \qquad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \tag{3.67}$$

三角関数の倍角の公式が得られる.

例題： cos θ, sin θ, tan θ を $e^{i\theta}$ を用いて表せ。

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

$$\tan\theta = \frac{1}{i}\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}$$

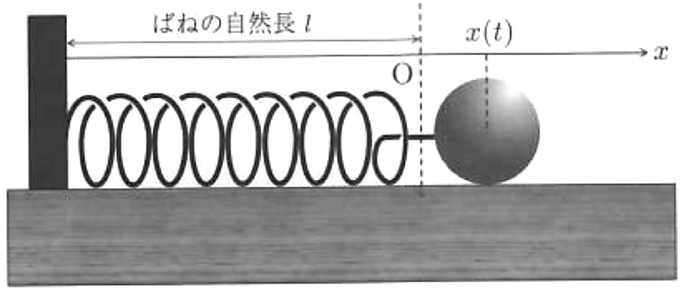
3.5 ばね振り子の運動

3.5.1 単 振 動

ばねに力が働かないときの長さ l を自然長とよび
ばねが自然長のときのおもりの重心に座標の原点をとる

フックの法則 (Hooke's law)

$$F = -kx \tag{3.69}$$



水平ばね振り子

1 次元調和振動子 (harmonic oscillator)

ばねの力は、自然長 l からの伸びに比例する。
ここで k は ばね定数とよばれるばね固有の定数である。

ばねにつながれたおもりの問題

ばねにつながれた質量 m のおもりに，フックの法則 (3.69) に従う力が働いている．ここで，物体を A だけ引っ張って静かに手を放したとき，その後のおもりの運動を求めよ．すなわち，$t=0$ での初期条件は位置が $x=A$ で初速度が 0 のときの運動方程式を解け．

ばねの質量は無視できるとすると，運動方程式はフックの法則から

$$m\ddot{x} = -kx \tag{3.70}$$

一般に2階微分方程式には2個の積分定数があるので、
一般の解は2個の任意定数を含むことになる 。

積分定数の数だけ任意定数をもつ微分方程式の解を一般解とよぶ。
この定数は物理的には初期の位置と速度を指定する自由度になる 。

運動方程式 (3.70) を

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.71}$$

三角関数を2回微分すると 符号が変わってもとに戻ることを思い出すと、
この方程式の解は

$$x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t \tag{3.72}$$

ただし，C_1, C_2 は任意定数である．

三角関数の公式を用いると

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\alpha) \qquad \alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)$$

$$x(t) = C\cos(\omega t + \alpha) \tag{3.73}$$

C, α は任意定数である．運動方程式の一般解になっていることがわかる．

【初期条件】 $t = 0$ で位置が $x = A$ で初速度は 0

$$x(0) = C\cos\alpha = A \tag{3.74}$$

$$\dot{x}|_{t=0} = -C\omega\sin\alpha = 0 \tag{3.75}$$

これより $\alpha = 0$，さらに $C = A$ よって，運動は

$$x(t) = A\cos\omega t \tag{3.76}$$

周期を T とすると，三角関数の周期性から

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{3.77}$$

ω は角振動数となる。

振幅が A で周期が T の**単振動** (simple oscillation)

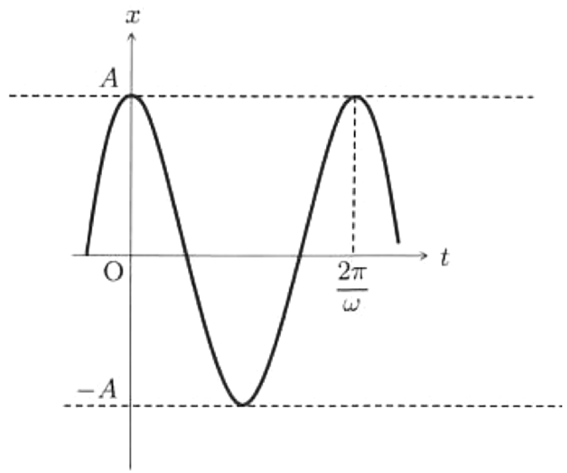
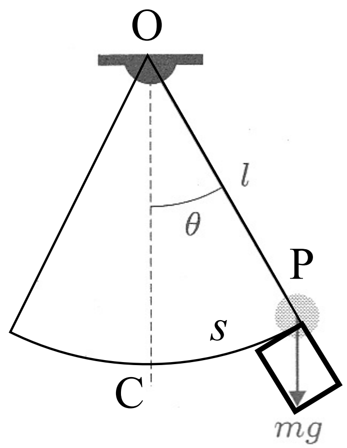


図 **3.5** 単振動のグラフ

単振り子

長さ l の棒の先に質量 m のおもりをつけた単振り子を考える。棒が鉛直方向となす角を θ とする。円周の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{CP}}$ の長さを s とする。



$$s = l\theta$$

角 θ が $d\theta$ だけ変わった時の弧の長さの変化 ds

$$ds = l\,d\theta$$

おもりの位置が時間 dt の間に ds だけ変わったとすると、円周に沿った速度は

$$\frac{ds}{dt} = l\frac{d\theta}{dt}$$

加速度は

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

おもりに働く重力の接線成分は $mg\ \sin\theta$ であるので、運動方程式は

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\ \sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\ \sin\theta$$

角 θ が十分に小さい時はテイラー展開の１次の項までで近似できるので

$$\sin\theta \cong \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

この式はばねの単振動を表す式と同じでありその一般解は

$$\theta(t) = C\ \cos(\omega t + \alpha) \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

この近似解は、単振り子の運動のごく一部しか表せない。
一方、この単振り子の運動方程式を厳密に解くことは困難。
しかし、運動の様子を調べることはできる。
運動方程式

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta$$

を書き直して

$$\dot{\theta} = v$$
$$\dot{v} = -\omega^2 \sin\theta$$

とする。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt}$$ の関係を用いると

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{-\omega^2 \sin\theta}{v}$$

なる関係が得られる。この式を積分して

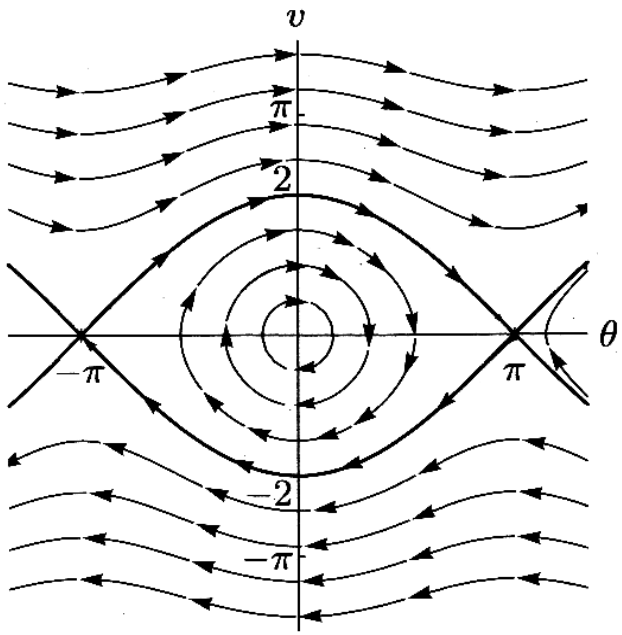
$$\frac{1}{2}v^2 - \omega^2 \cos\theta = C$$

となる。簡単のため $\omega = 1$ とする。
v と角 θ が十分に小さい時、テイラー展開して

$$\cos\theta \cong 1 - \frac{1}{2}\theta^2$$

$$v^2 + \theta^2 = 2(C + 1)$$

v と θ の関係（相空間：位置と運動量で表す座標系、での軌道）は近似的に円形となり、
C は小さな値を持つ。C が大きくなると軌道は次第に大きくなる。そのとき、上の近似は使えない。



$$v = \pm\sqrt{2(C + \cos\theta)}$$

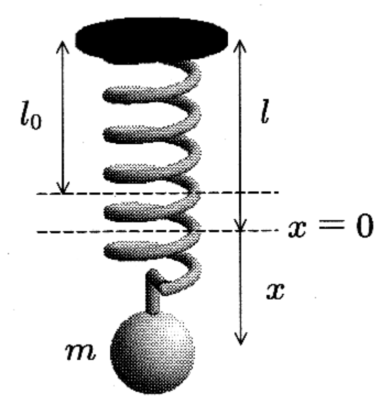
C が 1 になると v は $\theta = \pi$ で 0 になる。

C が 1 より大きくなると v は 0 にならなくなり、
ある値の周りで振動するようになる。

問題：バネの振動の運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx$$

初期条件を $x(0) = x_0$, $y(0) = v_0$ として、
この運動の軌跡を相平面に描け



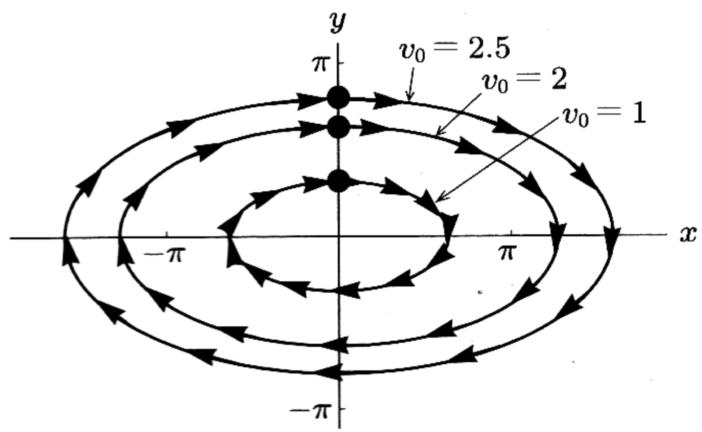
運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx$$

ここで、$\omega^2 = k/m$, $\dot{x} = y$ とおくと、

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\omega^2 x$$

となる。ここでの状態空間は (x, y) 平面である。



$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt}$$

を用いて

$$\frac{dy}{dx} = -\omega^2 \frac{x}{y}$$

これを解く事により、軌道は積分定数 C を用いて

$$y^2 + \omega^2 x^2 = C$$

と表せる。$\omega = 1$ では円, $\omega \neq 1$ では楕円になる。初期条件を $x(0) = x_0$, $y(0) = v_0$ とすると、 $C = x_0^2 + \omega^2 v_0^2$ である。