4 運動の保存量

［保存量］ 運動を通じて変化しない量のことを**保存量** (conserved quantity) という．

本章では 力学で現れる3つの基本的な保存量
すなわち運動量 エネルギー 角運動量について議論する 。

4.1 自由粒子の保存量

4.1.1 運 動 量

自由粒子の運動方程式は

$$m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{0} \tag{4.1}$$

x 方向の成分だけに注目すると運動方程式は

$$m\ddot{x} = \frac{d}{dt}mv_x = 0 \tag{4.2}$$

$$p_x = mv_x \tag{4.3}$$

は，時間微分をすれば 0．したがって，運動を通じて変化しない保存量

ベクトル量として3次元で考えても，運動方程式は

$$\frac{d}{dt}m\vec{v} = \vec{0} \tag{4.4}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{4.5}$$

これが運動量(momentum)の定義である。

自由粒子（力が働いていない粒子）では運動量は保存される 。

4.1.2 運動エネルギー

運動エネルギー(Kinetic energy)は物体の運動状態を表すエネルギーであり、速度の内積で与えられる。

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \tag{4.6}$$

T を時間微分すると

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}m(2v_x\dot{v}_x + 2v_y\dot{v}_y + 2v_z\dot{v}_z) = m\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} \tag{4.7}$$

力が働いていないと運動方程式 (4.4) から $\dot{\vec{v}} = \vec{0}$ であるため，右辺が 0

運動エネルギー T が保存することがわかる.

4.1.3 角運動量

位置ベクトルと運動量ベクトルの外積を用いて角運動量 (angular momentum)を定義する。

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \tag{4.8}$$

次式のように時間微分をすると

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = m(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) \tag{4.9}$$

（注） $\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b}) = (\dot{\vec{a}}\times\vec{b}) + (\vec{a}\times\dot{\vec{b}})$ 外積におけるライプニッツ則

$\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)$ の x 成分 $(\vec{a} \times \vec{b})_x = a_y b_z - a_z b_y$;

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(a_y b_z - a_z b_y) &= \dot{a}_y b_z - \dot{a}_z b_y + a_y \dot{b}_z - a_z \dot{b}_y \\ &= (\dot{\vec{a}} \times \vec{b})_x + (\vec{a} \times \dot{\vec{b}})_x \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = m(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) \tag{4.9}$$

右辺の第 1 項は同じベクトルの外積なので $\vec{0}$ になる.

第 2 項は自由粒子の運動方程式 (4.1) より $\vec{0}$ になる.

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{0} \tag{4.11}$$

自由粒子では角運動量 $\vec{L}$ が保存することがわかる.

4.2 運動エネルギーと仕事

この節では力が働く場合のエネルギーについて考えてみる.

4.2.1 1 次元運動のエネルギー

簡単のために運動が直線上でのみ起こる場合を考え, その位置と速度を x, v とし, 点 x では $F(x)$ が働いているとしよう.

力が働く場合は，運動エネルギーは一定ではないが，その時間微分は

$$\frac{dT}{dt} = mv\dot{v} \tag{4.13}$$

力がある場合の運動方程式 $m\dot{v} = F$ を代入する

$$\frac{dT}{dt} = vF(x) \tag{4.14}$$

【仕事と仕事率】

式 (4.14) の左辺を区間 $[t_1, t_2]$ $(t_1 < t_2)$ で積分すると

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dT}{dt}\, dt = T\Big|_{t_1}^{t_2} = T(t_2) - T(t_1) = \Delta T \tag{4.15}$$

運動の間に生じる運動エネルギーの変化を与える．

式 (4.14) の右辺の積分は，積分の変数変換の公式を用いると

$$\int_{t_1}^{t_2} F(x)\frac{dx}{dt}\, dt = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx = W \tag{4.16}$$

ここで得られた力を移動距離に関して積分した

$$W \equiv \int_{x_1}^{x_2} F\,dx \tag{4.17}$$

は，力により引き起こされるエネルギーの変化を与えており，これを**仕事** (work)

特に，力が一定の場合，式 (4.17) は

$$仕事 = 力 \times 距離 \tag{4.18}$$

以上の議論から

$$\Delta T = W \tag{4.20}$$

仕事とエネルギー

運動エネルギーの変化は力による仕事に等しい．

仕事は，運動エネルギーの変化へと形を変えるが，エネルギーそのものは保存している

逆に

$$W_{t_0\to t_1} = \int_{t_0}^{t_1}\left(\boldsymbol{F}(t)\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)dt = \int_{t_0}^{t_1}\left(m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}(t)\right)dt = \int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\frac{dK}{dt}dt = K(t_1) - K(t_2) \qquad K = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$P = vF \tag{4.19}$$

力によるエネルギーの変化率を与えるので**仕事率** (power)

4.2.2　摩擦力とエネルギー

摩擦力による仕事と運動エネルギー

摩擦のない床の上を速度 v で直線運動する質量 m の物体を考える．図 4.2 のように，AB 間には動摩擦係数が μ' のテープを面上に貼っておく．物体がテープの上を横切った後，速度 v' で運動を続けたとする．AB 間の距離を l として，摩擦のした仕事と物体の運動エネルギーをそれぞれ求めよ．ただし，動摩擦による力は

$$F = -mg\mu' \tag{4.21}$$

で一定とする．また，運動は図の右向きに起こり，テープの上で止まらないとする．

点 A より左での運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{4.22}$$

点 B より右では

$$T' = \frac{1}{2}mv'^2 \tag{4.23}$$

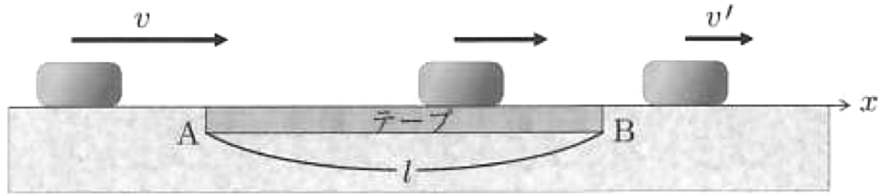


図 4.2 直線上を運動する物体
テープの貼ってある部分は摩擦が働く.

運動エネルギーの変化は

$$\Delta T = T' - T = \frac{1}{2}m(v'^2 - v^2) \tag{4.24}$$

物体の摩擦による仕事は，力を受けた区間で積分すればよく

$$W = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (-mg\mu')\,dx = -mg\mu' l \tag{4.25}$$

運動エネルギーの変化は物体に働く力が行った仕事に等しいので

$$\Delta T = \frac{1}{2}m(v'^2 - v^2) = -mg\mu' l = W \tag{4.26}$$

摩擦力は物体に負の仕事をしたことになる.

$$v' = \sqrt{v^2 - 2g\mu' l} \tag{4.27}$$

床が受けた仕事は摩擦熱を発生し熱エネルギーの形になってしまう.

熱エネルギーに変換された仕事を合わせると全エネルギーは保存している．

$$\Delta E = \Delta T + (-W) = 0 \tag{4.28}$$

4.2.3 仕事の例

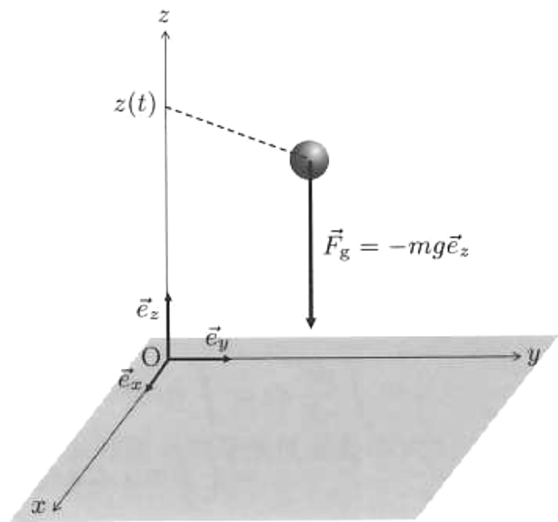
【落下運動】

§3.2 で学んだ自由落下の状況で，図 3.1 のように鉛直方向の座標を z とすると，

$$F_z = -mg \tag{4.29}$$

t_1 から t_2 の間の仕事は

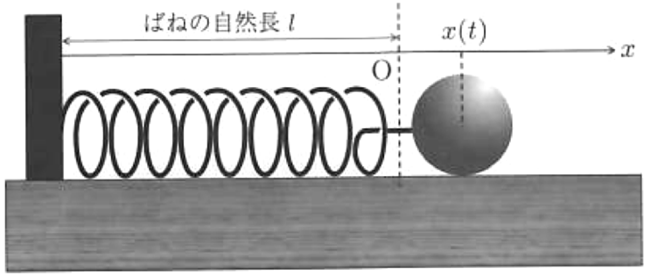
$$\begin{aligned} W &= \int_{t_1}^{t_2} (-mg)\dot{z}\, dt \\ &= -mg \int_{z(t_1)}^{z(t_2)} dz = -mg(z(t_2) - z(t_1)) \end{aligned} \tag{4.30}$$



ここで，t_1 から t_2 の間に h だけ落下したとすると，

$$W = mgh \tag{4.31}$$

【ばねの運動】



おもりの平衡点の重心座標を x_0 とする.

ばね定数を k, おもりの質量を m とすると, おもりに働く力は

$$F_x = -k(x - x_0) \tag{4.32}$$

ばねを x まで引っ張ったとき, ばねがおもりに及ぼした力の行った仕事は

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_0}^{x} F_{\tilde{x}}\, d\tilde{x} \\ &= \left(-\frac{1}{2}k\tilde{x}^2 + kx_0\tilde{x}\right)\Bigg|_{\tilde{x}=x_0}^{\tilde{x}=x} \\ &= -\frac{1}{2}k(x^2 - x_0^2) + kx_0(x - x_0) \\ &= -\frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \end{aligned} \tag{4.33}$$

エネルギーの変化はばねの伸びの 2 乗に比例する

ばねの伸びる方向と力の方向は逆になるので, ばねがした仕事は負になる.

4.2.4 3 次元の場合

【3 次元の仕事と仕事率】

力が働く場合は，運動エネルギーは一定ではないが，その時間微分は

$$\frac{dT}{dt} = m\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} \tag{4.34}$$

力がある場合の運動方程式 $m\dot{\vec{v}} = \vec{F}$ を代入すると

$$\frac{dT}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F} \tag{4.35}$$

両辺を時間で積分する．左辺は，

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dT}{dt}\, dt = T\Big|_{t_1}^{t_2} = T(t_2) - T(t_1) = \varDelta T \tag{4.37}$$

運動の間に生じる運動エネルギーの変化を与える．

右辺の積分は，仕事率の時間積分

$$P \equiv \vec{v} \cdot \vec{F} \tag{4.36}$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \vec{v})\, dt \tag{4.38}$$

であり**仕事**を与える．

この被積分関数に現れる仕事率は，力と速度の内積なので，物体
にかかる力のうち運動に平行な成分のみが仕事をしていることを意味する．
力による仕事 W が力の運動の経路に沿った成分の積分として与えられる．

$$W = \int_{\vec{r}_1, C}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{4.39}$$

C は $\vec{r}(t)$ の定める経路を表す．

【落下による仕事】

粒子に重力が働く場合を考えよう．

重力は

$$\vec{F} = -mg\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

重力による仕事は

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} (-mg) \frac{dz}{dt}\, dt \\
&= -mg \int_{z(t_1)}^{z(t_2)} dz = -mg\Delta z
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

h だけ落下したとすると，$\Delta z = -h$ を代入して

$$
W = mgh \tag{4.42}
$$

【斜面による仕事】

重力中で滑らかな斜面を滑り落ちる物体の運動

高さ h から滑り落ちるとして，物体の位置は

$$
\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ y(t) \\ h - y(t)\tan\theta \end{pmatrix} \tag{4.43}
$$

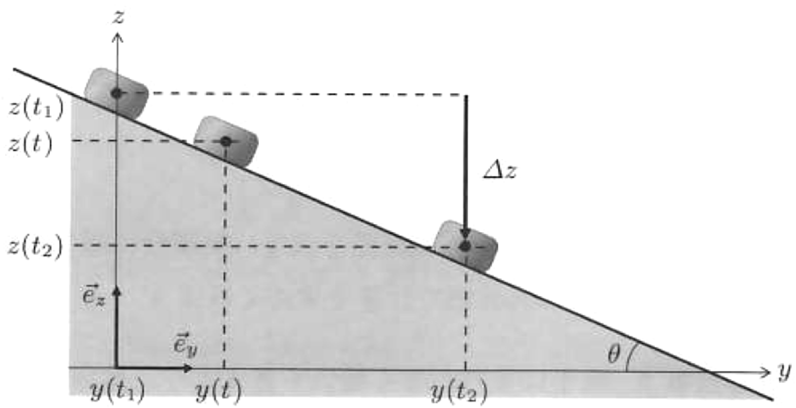


図 4.3　斜面上を滑り落ちる物体
x 座標は紙面に垂直で図には描いていない．

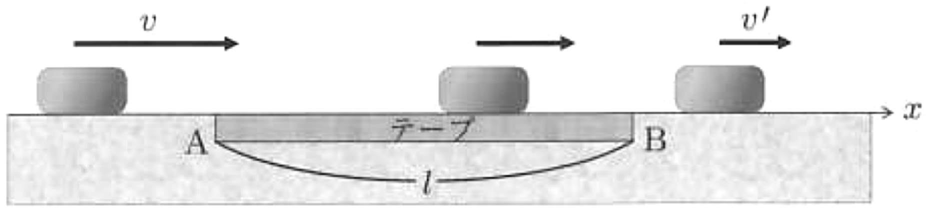
この式の時間微分と重力 (4.40) の内積を積分すれば

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\dot{\vec{r}}\,dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} (mg\tan\theta)\dot{y}\,dt \\
&= mg(y(t_2)-y(t_1))\tan\theta = -mg\Delta z
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

$-(y(t_2)-y(t_1))\tan\theta$ は落下距離に等しいので Δz とする

【摩擦による仕事】

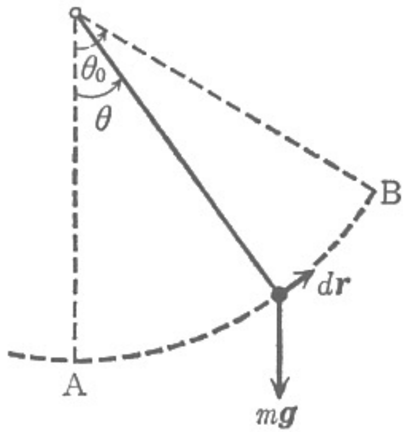
摩擦のある床の上にある質量 m の物体を，床に平行な力で押して距離 X だけ動かしたとする．



床を押すときは動摩擦力の大きさ $\mu' mg$ よりわずかに大きな力で押したとすると

$$
W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} > \int_0^X \mu' mg\,dx = \mu' mgX \tag{4.45}
$$

問題： 長さ l の振り子において、質量 m のおもりが鉛直下方の
$\theta = 0$ にあたる点 A から円周に沿って角度 θ_0 の点 B まで運動する時、
重力のする仕事を計算せよ。



$$
\begin{aligned}
W &= \int_0^{\theta_0} mg\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) l d\theta \\
&= mgl\int_0^{\theta_0} (-\sin\theta)\, d\theta \\
&= mgl[\cos\theta]_0^{\theta_0} = mgl(\cos\theta_0 - 1)
\end{aligned}
$$

4.3 ポテンシャルエネルギーとエネルギー保存

4.3.1 保存力とポテンシャル

落下の場合，仕事 W は Δz，すなわち初期値と終点での高さの差

として表すことができ，その道筋によらない．粒子の位置のみによる関数

$$U(\vec{r}) = -mgz \tag{4.46}$$

落下による仕事は

$$W = -U(\vec{r}(t_2)) - \big(-U(\vec{r}(t_1))\big) = -\Delta U \tag{4.47}$$

U の始点の値と終点の値の差として表すことができる．

仕事が粒子の位置だけによるある関数 U の差として書け

る場合，その力は**保存力** (conservative force) U は**ポテンシャル** (potential)

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{4.48}$$

保存力では U は途中の道筋によることはなく，線積分の経路を指定する必要はない．ポテンシャルが与えられると，その微分が力を与える．

$$\vec{F} = -\nabla U = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} \\ \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{4.49}$$

$\dfrac{\partial}{\partial x}$ は x に関する**偏微分** (partial differentiation)　x 以外の変数を定数とした微分を表す

∇ は**ナブラ** (nabla)

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{4.50}$$

∇U は U の 座標 $\vec{r}=(x,y,z)$ のそれぞれの方向の微分を並べたベクトルを与える.

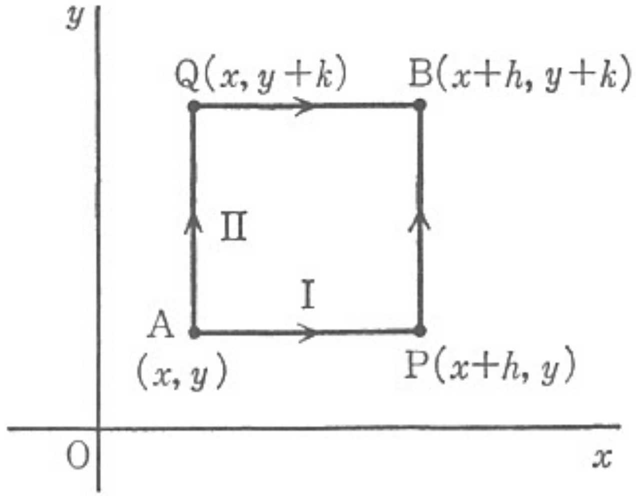
∇U を U の**勾配** (gradient)

保存力の見極め方

右図のように点 A (x,y) から点 B$(x+h, y+k)$ までの経路 I と II を考える。

経路 I による仕事は

$$W_{\mathrm{I}} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x(x,y)h + F_y(x+h,y)k$$



F_{x} と F_{y} は力 $\vec{F}$ の x 成分と y 成分である。

経路 II の対する仕事は

$$W_{\mathrm{II}} = F_y(x,y)k + F_x(x,y+k)h$$

力が保存力であるためには $W_{\mathrm{I}} = W_{\mathrm{II}}$ である。

$$F_x(x,y)h + F_y(x+h,y)k = F_y(x,y)k + F_x(x,y+k)h$$

$$\{F_x(x,y+k) - F_x(x,y)\}h = \{F_y(x+h,y) - F_y(x,y)\}k$$

ここで

$$F_x(x,y+k) - F_x(x,y) = \frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}k$$

$$F_y(x+h,y) - F_y(x,y) = \frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x}h$$

従って

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

が成立すれば、その力は保存力である。

非保存力：保存力ではない力のことで、例えば摩擦力は非保存力である。摩擦のある床の上を物体が滑る場合、摩擦力は物体に対して負の仕事をする。物体の運動エネルギーは熱エネルギーに変わり、物体は減速する。しかし、この逆過程はおこらない、すなわち熱エネルギーが摩擦力によって物体を加速することはない。

4.3.2　力学的エネルギーの保存則

【力学的エネルギー】

保存力の場合、仕事は

$$\begin{aligned} W &= \Delta T = T(t_2) - T(t_1) \\ &= -\Delta U = -U(\vec{r}(t_2)) - \big(-U(\vec{r}(t_1))\big) \end{aligned} \tag{4.51}$$

$$T(t_1) + U(\vec{r}(t_1)) = T(t_2) + U(\vec{r}(t_2)) \tag{4.52}$$

$T + U$ が時間によらず保存することがわかる.

ポテンシャルをエネルギーの一種、ポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）
と考え運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和

$$E = T + U \tag{4.53}$$

を**力学的エネルギー** (mechanical energy) とよぶ.

力学的エネルギーの保存則

保存力においては

力学的エネルギー ＝ 運動エネルギー ＋ ポテンシャルエネルギー

が保存する.

【重力とポテンシャル】 自由落下の例では

$$U = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = mg \int_{z_0}^{z} dz = mgz - mgz_0 \tag{4.54}$$

z_0 は適当なポテンシャルエネルギーを測る基準点

$z(t_1)$ から $z(t_2)$ まで落下したときの仕事は

$$\begin{aligned} W &= -\Delta U = -\big(U(z(t_2)) - U(z(t_1))\big) \\ &= -mg\big(z(t_2) - z(t_1)\big) = -mg\Delta z \end{aligned} \tag{4.55}$$

ポテンシャル U の勾配は

$$\vec{F} = -\nabla U = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} (-mgz) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \tag{4.56}$$

質量 m の粒子に働く重力を与える.

4.3.3 ばねにつながれた物体の力学的エネルギー

【運動の様子】

ばねにつながれた質量 m の物体の運動方程式

$$m\ddot{x} = -kx \tag{4.57}$$

$$x = A\cos\omega t \tag{4.58}$$

角振動数は $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

【ばねのポテンシャル】 ばねによる力は，

$F = -kx$ で与えられる．そこで，平衡点を原点にとって

$$U = -\int_0^x (-kx)\,dx = \frac{1}{2}kx^2 \tag{4.59}$$

ばねのした仕事

$$W = -\Delta U \tag{4.60}$$

【力学的エネルギーの保存】

単振動の力学的エネルギー

角振動数 ω, 振幅 A で単振動する物体の運動では, 力学的エネルギーが一定で

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \tag{4.62}$$

で与えられることを示せ.

ポテンシャルエネルギーは, 単振動の解 (4.58) より

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t \tag{4.63}$$

運動エネルギーは $v = \dot{x} = -A\omega\sin\omega t$ を代入すると

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(A\omega\sin\omega t)^2 \tag{4.64}$$

$$T = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2\omega t \tag{4.65}$$

$\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ であることより，力学的エネルギーは

$$
\begin{aligned}
E &= T + U \\
&= \frac{1}{2}kA^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) \\
&= \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2
\end{aligned}
\tag{4.66}
$$

一定であることがわかる．

4.3.4 中心力とポテンシャル